Lezione 21

Def: (M, g) varietà pR $\qquad \gamma : I \to M$ curva $\qquad \dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)} M$

$$L(\gamma) = \int_I \| \dot\gamma(t) \| \, dt$$ LUNGHEZZA di γ $\qquad \|v\| = \sqrt{|\langle v, v\rangle|}$

Una RIPARAMETRIZZAZIONE di γ è un diffeo$^+$ $\underset{u}{J} \xrightarrow{\varphi} \underset{t}{I}$

$$\eta = \gamma \circ \varphi$$

Prop: $L(\gamma) = L(\eta)$ $\qquad t = \varphi(u) \qquad dt = \varphi'(u) du$

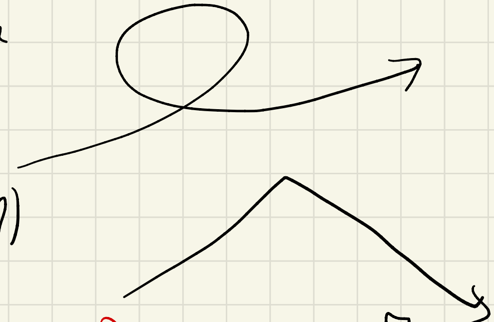
dim: $$L(\gamma) = \int_I \| \dot\gamma(t) \| \, dt = \int_I \underbrace{\| \dot\gamma(\varphi(u)) \| \, \varphi'(u)} \, du$$

$$= \int \| \eta(u) \| \, du$$

Chiameremo riparametrizzazione anche

$\varphi : J \to I$ suriettiva $\dot{\varphi}(u) \geq 0$

e anche in questo caso $L(\gamma) = L(\eta)$



Se (M, g) è connessa Riemanniana definisco una DISTANZA su M:

$$d(P, Q) := \inf \{ L(\gamma) \mid \gamma \text{ curva che collega } p \text{ e } q \}$$

Prop: d è distanza

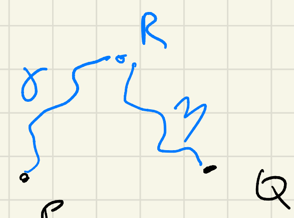
dim:

1) $d = 0 \iff P = Q$

2) $d(P, Q) = d(Q, P)$ chiaro

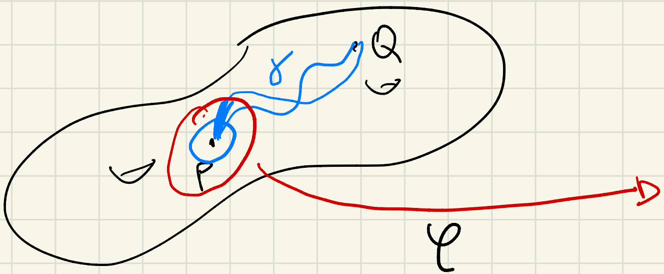
3) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$

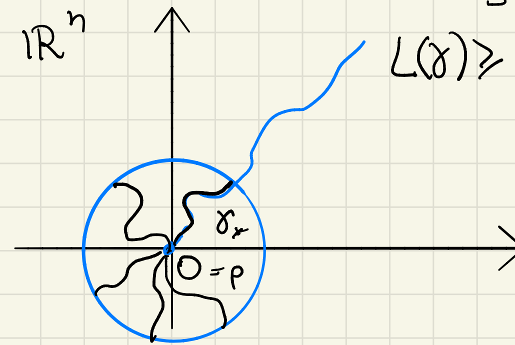
$\gamma \; * \; \eta$



$$L(\gamma * \eta) = L(\gamma) + L(\eta)$$

1) $P=Q \Rightarrow d=0$





$\exists M:$

$L(\gamma) \geq L(\gamma_*) \geq M$

$\forall \gamma_*$ che collega O a S^{n-1}

$\Downarrow$

$L(\gamma) \geq M$

$x \in \mathbb{R}^n \qquad g(x) = g_{ij}(x)$

Es:

$v \in T_x\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \qquad \boxed{m\|v\|_E \leq \|v\|_g \leq M\|v\|_E}$

$g_{ij} \qquad \delta_{ij}$

m, M non dip. da v

dipendono in modo continuo da x

$0 < m < M$ hanno minimo e massimo su D^n

$0 < m^{min} < M^{max} \Rightarrow \|v\|_g \geq m^{min}\|v\|_E$

$$\Rightarrow L^g(\gamma_x) \geq L^E(\gamma_x) \cdot m^{min} \geq m^{min} > 0$$

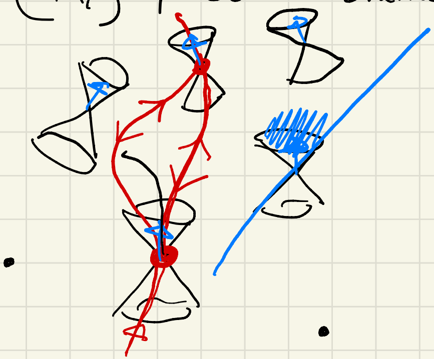
$\square$

Ex: La topologia indotta da d è quella di M

$(M, g) \dashrightarrow d \dashrightarrow$ topologia

Def: In (M, g) pR $\gamma : I \to M$ è di tipo TEMPO / LUCE / SPAZIO se $\gamma'(t)$ è tempo / luce / spazio $\forall t$

(M, g) Lorentziana: fotoni si muovono su curve luce
particelle con massa " " " tempo con $\|\gamma'(t)\| = 1$



Def: $L(\gamma)$ con γ di tipo tempo è il TEMPO PROPRIO

Def (M, g) Lorentziana. M è TEMPO-ORIENTABILE

se è possibile scegliere $\forall x \in M$ una delle due c.c.

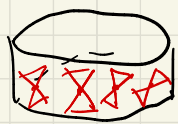
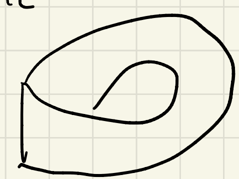
dei vettori di tipo tempo in $T_x M$

in modo che la scelta sia continua in x

$\forall x \ \exists U(x)$, $X \in \mathfrak{X}(U)$ mai nullo di tipo tempo

t.c. $\forall y \in U(x)$ $X(y)$ sia futuro

Ex: (Con disegni) costruite strutture lorentziane

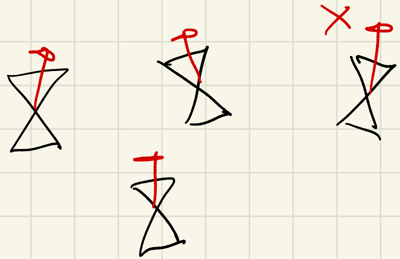
su $S^1 \times \mathbb{R}$  e su Möbius 

che siano sia time-orientable che non

$(2 \times 2 = 4$ oggetti$)$

Prop: (M,g) Lorentziana. È time-orientable $\iff \exists\, X \in \mathfrak{X}(M)$ di vettori di tipo tempo mai nullo

$\boxed{\Leftarrow}$



Uso X per definire il futuro

$\boxed{\Rightarrow}$

$\forall x \ \exists\, U(x)$, $X_x \in \mathfrak{X}(U)$ verso il futuro

$\{U(x)\} \to \{\rho_x\}$ partizione unità

$$X(y) = \sum_{x \in \Pi} \rho_x(y)\, X_x(y)$$

funziona

- metriche def+
- n-forme +
- vettori futuri

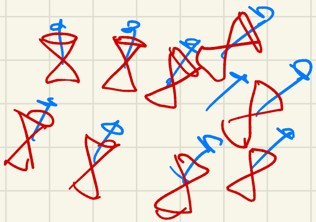
$\square$

Prop: M ha metrica Lorentziana time-orientable $\Longleftrightarrow$ ha un campo di vettori mai nullo

dim

$\boxed{\Rightarrow}$ già visto $\exists X$ mai nullo diretto verso il futuro.

$\boxed{\Leftarrow}$



Sia g Riemanniana su M

$$\underset{(n,0)}{g}, X \longrightarrow \underset{(n-1,1)}{g'} \text{ Lorentziana}$$

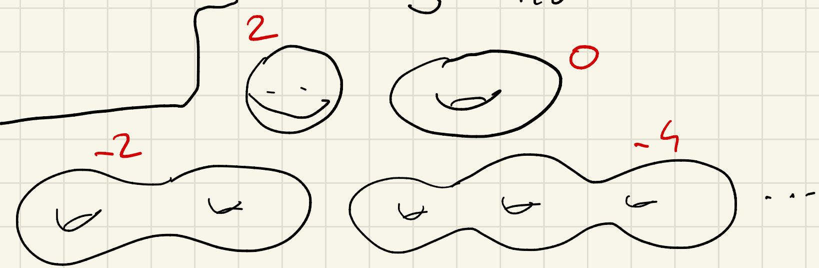
X normalizzato: $\bar{X}(p) = \dfrac{X(p)}{\|X(p)\|}$

Teo (Poincaré-Hopf)

M ha $X \in \mathfrak{X}(M)$ mai nullo

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \ M \text{ non cpt} \\ 2) \ M \text{ cpt } \chi(M) = 0 \end{cases}$

S^2 no



Teo: ogni sup. cpt ori conn senza ∂ è diffeom a S^2, $\#_g T$

$\forall p \in M \qquad \forall v, w \in T_pM$

$$g'(p)(v,w) = g(p)(v,w) - 2\, g(p)(v,X)\, g(p)(w,X)$$

$$g'_{ij} = g_{ij} - 2\, g_{i\ell} X^\ell\, g_{jk} X^k$$

$$\delta_{ij} \quad -2\, \delta_{i\ell} X^\ell\, \delta_{jk} X^k$$

Base ortonormale $\{X(p), v_2, \dots, v_n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ g' ha segnatura $(n-1,1)$ $\qquad M^3 \times \mathbb{R} \qquad \mathbb{R}^4$

FORMA VOLUME

<u>Def</u>: (M,g) orientata pR $\dashrightarrow$ $\omega_g \in \Omega^n(M)$ FORMA VOLUME associata a g

$\forall x \in M$, $T_x M$ ha $g(x)$ non-deg.

$$\omega(x) \in \Lambda^n(T_x M)$$

Def: V sp. vett. con $\langle , \rangle$ (p,q) non deg. $e_1, \dots, e_n$ è ORTONORMALE

se $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j > q+1 \\ -1 & \text{se } i = j \leq q \end{cases}$

V orientato

Def: $\omega \in \Lambda^n(T_x M)$ è determinata da $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$
$\forall$ base ortonormale positiva

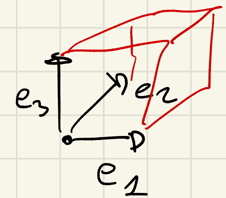
In carte: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $g(x)$

(U, g) pR

$$\omega_g = \sqrt{|\det g|}\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

idea: $g(x)$ simmetrica $\xrightarrow[\text{Spettrale}]{}$ $g(x)$ diagonale

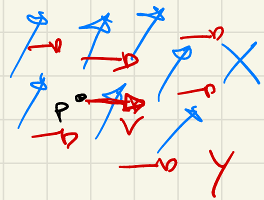
$$g(x) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$



$\|e_1\|_g = \sqrt{\lambda_1}$

CONNESSIONI

M

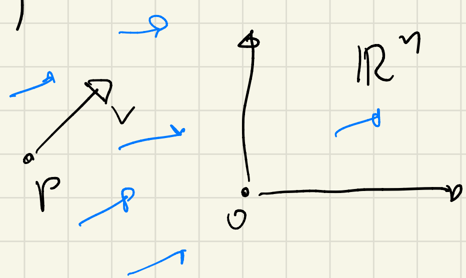


$\mathcal{L}_Y(X) = [Y, X]$

$\mathcal{L}_Y(X)(p)$

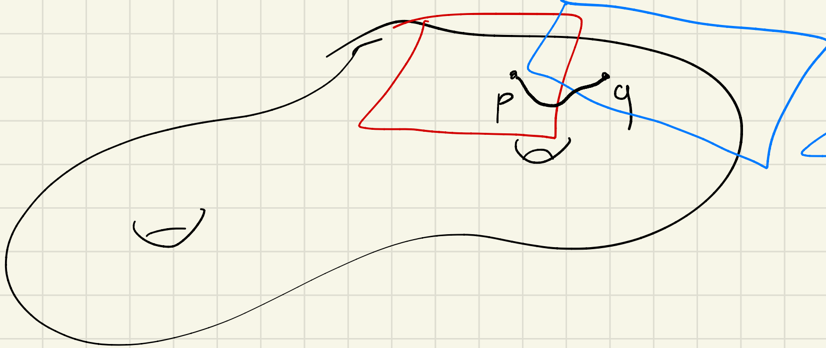
$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$

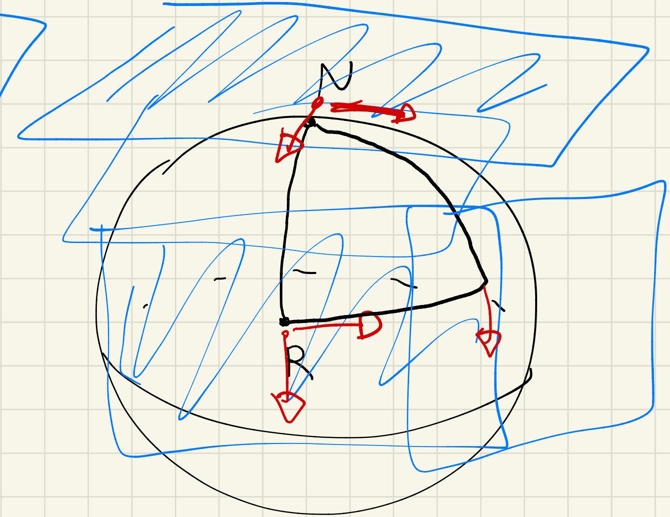
$v \in T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$



$$\frac{\partial X}{\partial v} = v^i \frac{\partial X}{\partial x^i}$$

$X: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$


p
q


N
R